Estructuras Algebraicas Segundo examen parcial	1^{er} Apellido: ______________	5 de junio de 2015
	2^{o} Apellido: ______________	Tiempo 2 h.
Departamento Matem. aplic. TIC ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________ Número de matrícula:	**Calificación:**

1. (2 puntos) Sea $(R, \oplus, \odot)$ un anillo.

   a) Escribir las propiedades que debe cumplir un subconjunto $S \subseteq R$ para ser un subanillo.

   b) Estudiar si $T = \{a + b\sqrt{6} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. ¿Es T un cuerpo?

2. (2 puntos) Sea $(R, \oplus, \odot)$ un anillo.

   a) Escribir las propiedades que debe cumplir un subconjunto $I \subseteq R$ para ser un ideal.

   b) Sea $A = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix} : x, z, t \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^{2\times 2}$ y sea $I = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{Z}\} \subset A$.
   Estudiar si I es un ideal del anillo $(A, +, \cdot)$. ¿Es I un ideal de $(\mathbb{Z}^{2\times 2}, +, \cdot)$?

3. (2 puntos)

   a) Calcular $d \in \mathbb{Q}[x]$, máximo común divisor de los polinomios:
   $f = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y $g = x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   Obtener polinomios $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $d = u \cdot f + v \cdot g$.

   b) Estudiar si los polinomios f, g y $d \in \mathbb{Q}[x]$ son irreducibles.

4. (2 puntos)

   a) Demostrar que $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x + 1\rangle$ es un cuerpo. Indicar el número de elementos de dicho cuerpo.

   b) Obtener el resultado la operación: $[2x^2+1]^{-1}_{x^3-x+1} \cdot [x^2+x+2]_{x^3-x+1}$, en el cuerpo $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3-x+1\rangle$.

5. (2 puntos)

   a) Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$ es una extensión simple de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

   b) Obtener una base y el grado de extensión de $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$ sobre $\mathbb{Q}$

Solución:

1. *b)* T es subanillo de $(\mathbb{R},+,\cdot)$:
   - $0 \in T \;\Rightarrow\; T \neq \emptyset$

   Sean $a_1 + b_1\sqrt{6}, a_2 + b_2\sqrt{6} \in T \;\;\Rightarrow$
   - $(a_1 + b_1\sqrt{6}) + (a_2 + b_2\sqrt{6}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{6} \;\in T$
   - $(a_1 + b_1\sqrt{6}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{6}) = (a_1a_2 + 6b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{6} \;\in T$

   $(T,+,\cdot)$ no es cuerpo porque no es anillo de división: $2 \in T - \{0\}$, pero $2^{-1} \notin T$

2. *b)* I es ideal del anillo $(A,+,\cdot)$:
   - $0 \in I \;\Rightarrow\; I \neq \emptyset$

   Sean $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} \in I, \;\; \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix} \in A \Rightarrow$
   - $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \;\in I$
   - $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 & 0 \\ za_1 + tc_1 & 0 \end{pmatrix} \;\in I$

     $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x & 0 \\ c_1x & 0 \end{pmatrix} \;\in I$

   I no es ideal del anillo $(\mathbb{Z}^{2\times 2},+,\cdot)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\notin I$

3. *a)* $d = x^2 - 2x + 2,\; u = -1,\;\; v = x^2 - x \;\; \in \mathbb{Q}[x]$

   b) d es irreducible por el criterio de Eisenstein para $p = 2$. f y g son divisibles por d, luego son reducibles.

4. *a)* $x^3 - x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$ por no tener raíces en $\mathbb{Z}_3$ y ser de grado 3 $\;\Rightarrow \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x + 1\rangle$ es un cuerpo con $3^3 = 27$ elementos.

   b) $[x^2 - 1]_{x^3-x+1}$

5. *a)* Sea $\alpha = \sqrt{7} + i$. Veamos que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$:

   '$\subseteq$' $\sqrt{7}, i \in \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i) \Rightarrow \alpha = \sqrt{7} + i \in \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i) \Rightarrow \qquad \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$

   '$\supseteq$' $\alpha = \sqrt{7} + i,\; \alpha^2 = 6 + 2\sqrt{7}i,\; \alpha^3 = 4\sqrt{7} + 20i \in \mathbb{Q}(\alpha) \;\;\Rightarrow\;\; i = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{16}\alpha^3 \in \mathbb{Q}(\alpha)$

   y $\;\sqrt{7} = \frac{20}{16}\alpha - \frac{1}{16}\alpha^3 \in \mathbb{Q}(\alpha) \;\;\Rightarrow \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$

   b) $B = \{1, \sqrt{7}, i, \sqrt{7}i\}, \qquad [\mathbb{Q}(\sqrt{7}, i) : \mathbb{Q}] = 4$